Chapitre 7 : Matrices symétriques et décomposition en valeurs singulières

7.1 Diagonalisation des matrices symétriques

Dans les chapitres précédents, nous avons étudié la diagonalisation des matrices carrées et l'orthogonalité dans $\mathbb{R}^n$. Ce chapitre combine ces deux notions pour établir un résultat fondamental : les matrices symétriques sont toujours diagonalisables, et de plus, elles le sont dans une base orthonormée. Ce résultat, appelé théorème spectral, a de nombreuses applications en analyse de données, en physique et en optimisation.

Rappels

Une matrice carrée A de taille $n \times n$ est *symétrique* si $A^T = A$. Autrement dit, les coefficients de A vérifient $a_{ij} = a_{ji}$ pour tout i, j. Une matrice symétrique est donc nécessairement carrée.

Exemples. Les matrices suivantes sont symétriques :

$$\mathbb{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \pi & e & \sqrt{2} \\ e & \pi & e \\ \sqrt{2} & e & \pi \end{bmatrix}$$

Par contre, les matrices suivantes ne sont pas symétriques :

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ -6 & 1 & -4 \\ 0 & -6 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Une matrice A de taille $n \times n$ est *diagonalisable* s'il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$. Les coefficients diagonaux de D sont les valeurs propres de A, et les colonnes de P sont des vecteurs propres associés, linéairement indépendants.

Nous avons vu que si A possède n valeurs propres distinctes, alors A est forcément diagonalisable. Mais qu'une matrice peut être non diagonalisable si la multiplicité algébrique d'une valeur propre est strictement plus grande que la dimension du sous-espace propre associé (multiplicité géométrique).

7.1.1 Orthogonalité des vecteurs propres

Nous allons démontrer une propriété remarquable des matrices symétriques : les vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont automatiquement orthogonaux.

Théorème 7.1 *Orthogonalité des vecteurs propres*

Soit A une matrice symétrique de taille $n \times n$. Si $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ sont deux vecteurs propres de A associés à des valeurs propres distinctes $\lambda_1 \neq \lambda_2$, alors $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ sont orthogonaux :

$$\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} = 0$$

Démonstration. Par hypothèse, on a $A\overrightarrow{v_1} = \lambda_1\overrightarrow{v_1}$ et $A\overrightarrow{v_2} = \lambda_2\overrightarrow{v_2}$, avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Calculons $\lambda_1(\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2})$ de deux façons différentes.

D'une part :

$$\lambda_1(\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2}) = (\lambda_1\overrightarrow{v_1}) \cdot \overrightarrow{v_2} = (A\overrightarrow{v_1}) \cdot \overrightarrow{v_2}$$

Or, $(A\overrightarrow{v_1}) \cdot \overrightarrow{v_2} = (A\overrightarrow{v_1})^T\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{v_1}^T A^T \overrightarrow{v_2}$.

Comme A est symétrique, $A^T = A$, donc :

$$\overrightarrow{v_1}^T A^T \overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{v_1}^T A \overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{v_1}^T(\lambda_2\overrightarrow{v_2}) = \lambda_2(\overrightarrow{v_1}^T\overrightarrow{v_2}) = \lambda_2(\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2})$$

On obtient donc :

$$\lambda_1(\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2}) = \lambda_2(\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2})$$

Ce qui implique :

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2}) = 0$$

Comme $\lambda_1 \neq \lambda_2$, on a nécessairement $\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} = 0$. □

Exemple. Considérons la matrice symétrique $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$.

Polynôme caractéristique :

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda\mathbb{I}_2) = \det\begin{bmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 5-\lambda \end{bmatrix} = (5-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 10\lambda + 21$$

$$= (\lambda - 7)(\lambda - 3)$$

Valeurs propres : $\lambda_1 = 7$ et $\lambda_2 = 3$ (toutes deux de multiplicité 1).

Espaces propres :

Pour $\lambda_1 = 7$:

$$A - 7\mathbb{I}_2 = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le système $x - y = 0$ donne $x = y$. Donc $E_7 = \text{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$.

Pour $\lambda_2 = 3$:

$$A - 3\mathbb{I}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le système $x + y = 0$ donne $x = -y$. Donc $E_3 = \text{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$.

Vérification de l'orthogonalité :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 0$$

Les vecteurs propres sont bien orthogonaux, conformément au théorème 7.1.
Donc par conséquent, $E_7^\perp = E_3$ et $E_3^\perp = E_7$.

Exemple. Considérons la matrice symétrique $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$.

On vérifie que $A^T = A$.
Polynôme caractéristique :

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{I}_3) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & -2 & -1 \\ -2 & 6-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 5-\lambda \end{vmatrix}$$

Après développement (par exemple selon la troisième colonne), on trouve :

$$p_A(\lambda) = -\lambda^3 + 17\lambda^2 - 90\lambda + 144 = -(\lambda - 8)(\lambda - 6)(\lambda - 3)$$

Valeurs propres : $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = 6$ et $\lambda_3 = 3$.
Espaces propres :
Pour $\lambda_1 = 8$: on résout $(A - 8\mathbb{I}_3)\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.

$$A - 8\mathbb{I}_3 = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Donc $E_8 = \text{Vect}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$.

Pour $\lambda_2 = 6$: $E_6 = \text{Vect}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$.

Pour $\lambda_3 = 3$: $E_3 = \text{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$.

Vérification de l'orthogonalité :

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 - 1 + 0 = 0$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -1 + 1 + 0 = 0$$

$$\begin{bmatrix}-1\\-1\\2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=-1-1+2=0$$

Les trois vecteurs propres sont deux à deux orthogonaux.

7.1.2 Matrices orthogonales

Rappel. Une matrice carrée U de taille $n \times n$ est dite *orthogonale* si elle est inversible et si $U^{-1} = U^T$.

Remarque 7.7.0.2. *Comme par définition nous avons $U^T U = \mathbb{I}_n$, les colonnes de U sont orthonormées et forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$. De plus, comme $UU^T = \mathbb{I}_n$, les colonnes de U^T (c'est-à-dire les lignes de U) sont aussi orthonormées et forment une autre base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.*

7.1.3 Diagonalisation orthogonale

Définition 7.3 *Diagonalisation orthogonale*

Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$. On dit que A est *diagonalisable orthogonalement* (ou *diagonalisable en base orthonormée*) s'il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telles que :

$$A = PDP^T$$

Remarques 7.7.0.4.
1. *Si A est diagonalisable orthogonalement, alors A est diagonalisable (car $P^{-1} = P^T$). La réciproque est fausse en général.*
2. *La condition $A = PDP^T$ signifie que les colonnes de P forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de A.*

Propriété 7.5

Si A est diagonalisable orthogonalement, c'est-à-dire $A = PDP^T$ où P est orthogonale et D est diagonale, alors A est symétrique.

Démonstration. On calcule A^T :

$$A^T = (PDP^T)^T = (P^T)^T D^T P^T = PDP^T$$

car $D^T = D$ (une matrice diagonale est symétrique).

Donc $A^T = PDP^T = A$, ce qui montre que A est symétrique. □

Le résultat fondamental de ce chapitre est la réciproque : toute matrice symétrique est diagonalisable orthogonalement. C'est le théorème spectral.

Exemple. Reprenons l'exemple de $A = \begin{bmatrix}5 & 2\\2 & 5\end{bmatrix}$.

Nous avons trouvé les vecteurs propres $\overrightarrow{v_1} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ pour $\lambda_1 = 7$ et $\overrightarrow{v_2} = \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$ pour $\lambda_2 = 3$.

Ces vecteurs sont orthogonaux mais pas de norme 1. Normalisons-les :

$$\|\overrightarrow{v_1}\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \quad \|\overrightarrow{v_2}\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

Les vecteurs propres unitaires sont :

$$\overrightarrow{u_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{u_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

En posant $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ et $D = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, on a :

$$A = PDP^T$$

Vérifions :

$$PDP^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{7}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{2}} \\ \frac{7}{\sqrt{2}} & -\frac{3}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{7}{2} + \frac{3}{2} & \frac{7}{2} - \frac{3}{2} \\ \frac{7}{2} - \frac{3}{2} & \frac{7}{2} + \frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = A$$

7.2 Le théorème spectral

7.2.1 Énoncé et conséquences

Théorème 7.6 *Théorème spectral*

Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. A est symétrique.
2. A est diagonalisable en base orthonormée.

De plus, si A est symétrique, alors :

(a) A admet n valeurs propres réelles (comptées avec leur multiplicité).

(b) Pour chaque valeur propre λ, la multiplicité algébrique et la multipolicité géométrique de λ sont égales.

(c) Les sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux. Donc notamment, deux vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.

(d) Il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de A.

Remarques 7.7.0.7. *1. L'ensemble des valeurs propres de A est appelé le* spectre *de A. C'est pourquoi ce théorème s'appelle le théorème spectral.*

2. *La propriété (a) garantit que les valeurs propres sont réelles (pas complexes), ce qui n'est pas le cas pour les matrices non symétriques en général.*
3. *La propriété (b) dit que la multiplicité géométrique égale la multiplicité algébrique pour toute valeur propre. C'est ce qui garantit la diagonalisabilité.*
4. *Si l'une des propriétés (a), (b), (c) ou (d) n'est pas vérifiée, alors A n'est pas symétrique.*

Démonstration. [Preuve partielle] Nous avons déjà démontré :
- (2) $\Rightarrow$ (1) : Si $A = PDP^T$ avec P orthogonale, alors A est symétrique (propriété démontrée précédemment).
- La propriété (c) découle du théorème 7.1.

La preuve complète de (1) $\Rightarrow$ (2) et des propriétés (a) et (b) nécessite des outils avancés d'algèbre linéaire (factorisation de Schur) et dépasse le cadre de ce cours. Nous l'admettrons. □

7.2.2 Valeurs propres réelles des matrices symétriques 2×2

Pour les matrices symétriques 2×2, nous pouvons démontrer que les valeurs propres sont toujours réelles.

Propriété 7.8

Soit $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$ une matrice symétrique 2×2. Alors les valeurs propres de A sont réelles.

Démonstration. Le polynôme caractéristique de A est :

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{I}_2) = (a - \lambda)(d - \lambda) - b^2 = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - b^2)$$

Le discriminant est :

$$\Delta = (a + d)^2 - 4(ad - b^2) = a^2 + 2ad + d^2 - 4ad + 4b^2 = a^2 - 2ad + d^2 + 4b^2$$
$$= (a - d)^2 + 4b^2$$

Comme $(a - d)^2 \geq 0$ et $4b^2 \geq 0$, on a $\Delta \geq 0$.
Donc le polynôme caractéristique a toujours deux racines réelles (éventuellement égales). □

7.2.3 Exemples de diagonalisation orthogonale

Méthode 7.9 *Diagonalisation orthogonale d'une matrice symétrique*

Pour diagonaliser orthogonalement une matrice symétrique A :
1. Calculer les valeurs propres de A (racines du polynôme caractéristique).
2. Pour chaque valeur propre λ, calculer une base de l'espace propre E_λ.
3. Si un espace propre est de dimension ≥ 2, appliquer (si nécessaire) le procédé de Gram-Schmidt pour obtenir une base orthogonale de cet espace propre.
4. Normaliser tous les vecteurs propres pour obtenir des vecteurs unitaires.
5. Les colonnes de P sont les vecteurs propres unitaires. La matrice D est diagonale avec les valeurs propres correspondantes sur la diagonale.

Exemple. Diagonaliser orthogonalement $A = \begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{bmatrix}$.

Étape 1 : Valeurs propres.
On calcule $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{I}_3)$:

$$A - \lambda \mathbb{I}_3 = \begin{bmatrix} 5-\lambda & -4 & -2 \\ -4 & 5-\lambda & -2 \\ -2 & -2 & 8-\lambda \end{bmatrix}$$

Après calcul, $p_A(\lambda) = -\lambda(\lambda - 9)^2$
Les valeurs propres sont $\lambda_1 = 0$ (multiplicité 1) et $\lambda_2 = 9$ (multiplicité 2).
Étape 2 : Espaces propres.
Pour $\lambda_1 = 0$:

$$A - 0 \cdot \mathbb{I}_3 = A = \begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

Réduction :

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Solution : $x_1 = 2x_3$, $x_2 = 2x_3$, x_3 libre.
Donc $E_0 = \text{Vect}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$. Notons $\overrightarrow{v_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.
Pour $\lambda_2 = 9$:

$$A - 9\mathbb{I}_3 = \begin{bmatrix} -4 & -4 & -2 \\ -4 & -4 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le système $2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$ a deux variables libres (x_2 et x_3).
Donc $E_9 = \text{Vect}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$. Posons $\overrightarrow{v_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\overrightarrow{v_3} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Étape 3 : Orthogonalisation dans E_9.
Vérifions d'abord si $\overrightarrow{v_2}$ et $\overrightarrow{v_3}$ sont orthogonaux :

$$\overrightarrow{v_2} \cdot \overrightarrow{v_3} = 1 \neq 0$$

Ils ne sont pas orthogonaux. Appliquons le procédé de Gram-Schmidt.
Calculons la projection :

$$\text{proj}_{\overrightarrow{v_2}}(\overrightarrow{v_3}) = \frac{\overrightarrow{v_3} \cdot \overrightarrow{v_2}}{\overrightarrow{v_2} \cdot \overrightarrow{v_2}} \overrightarrow{v_2} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Alors :

$$\overrightarrow{w_3} = \overrightarrow{v_3} - \text{proj}_{\overrightarrow{v_2}}(\overrightarrow{v_3}) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Étape 4 : Normalisation.

$$\|\overrightarrow{v_1}\| = \sqrt{4+4+1} = 3, \quad \overrightarrow{u_1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\|\overrightarrow{v_2}\| = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2}, \quad \overrightarrow{u_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\|\overrightarrow{w_3}\| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+4} = \frac{3}{\sqrt{2}}, \quad \overrightarrow{u_3} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Résultat :

$$P = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Et on a $A = PDP^T$.

7.3 Décomposition spectrale

Le théorème spectral nous permet d'écrire une matrice symétrique sous une forme particulièrement élégante appelée *décomposition spectrale*.

Définition 7.10 *Décomposition spectrale*

Soit A une matrice symétrique de taille $n \times n$, diagonalisable orthogonalement avec $A = PDP^T$, où $P = \begin{bmatrix} \overrightarrow{u_1} & \overrightarrow{u_2} & \cdots & \overrightarrow{u_n} \end{bmatrix}$ est une matrice orthogonale dont les colonnes forment une base orthonormée de vecteurs propres, et $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$ est la matrice diagonale des valeurs propres associées.

La *décomposition spectrale* de A est l'écriture :

$$A = \lambda_1 \overrightarrow{u_1}\overrightarrow{u_1}^T + \lambda_2 \overrightarrow{u_2}\overrightarrow{u_2}^T + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{u_n}\overrightarrow{u_n}^T = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{u_i}\overrightarrow{u_i}^T$$

Remarques 7.7.0.11. 1. *Pour chaque i, le produit $\overrightarrow{u_i}\overrightarrow{u_i}^T$ est une matrice $n \times n$ de rang 1. En effet, si $\overrightarrow{u_i}$ est un vecteur colonne, alors $\overrightarrow{u_i}\overrightarrow{u_i}^T$ donne une matrice dont toutes les colonnes sont colinéaires à $\overrightarrow{u_i}$.*

2. *La matrice $\overrightarrow{u_i}\overrightarrow{u_i}^T$ représente la matrice de projection orthogonale sur la droite engendrée par $\overrightarrow{u_i}$. En effet, pour tout vecteur $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$.*

3. *La décomposition spectrale exprime donc A comme une somme pondérée de matrices de projection sur les sous-espaces propres, les poids étant les valeurs propres correspondantes.*

Démonstration. [Justification de la décomposition spectrale] Soit $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$. Comme $(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_n})$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$, on a :

$$\overrightarrow{x} = \sum_{i=1}^{n} (\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{u_i})\overrightarrow{u_i} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{u_i}(\overrightarrow{u_i} \cdot \overrightarrow{x}) = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{u_i}\overrightarrow{u_i}^T\overrightarrow{x}$$

En appliquant A et en utilisant le fait que $A\overrightarrow{u_i} = \lambda_i \overrightarrow{u_i}$:

$$A\overrightarrow{x} = \sum_{i=1}^{n} A\overrightarrow{u_i}\overrightarrow{u_i}^T\overrightarrow{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{u_i}\overrightarrow{u_i}^T\overrightarrow{x} = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{u_i}\overrightarrow{u_i}^T\right)\overrightarrow{x}$$

Ceci étant vrai pour tout $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$, on obtient $A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{u_i}\overrightarrow{u_i}^T$. □

Exemple. Donnons la décomposition spectrale de $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$.

Nous avons déjà calculé que $A = PDP^T$ avec :

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Les vecteurs propres unitaires sont $\overrightarrow{u_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (pour $\lambda_1 = 7$) et $\overrightarrow{u_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (pour $\lambda_2 = 3$).

Calculons les matrices de projection :

$$\overrightarrow{u_1}\overrightarrow{u_1}^T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{u_2}\overrightarrow{u_2}^T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

La décomposition spectrale est donc :

$$A = 7 \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Vérification :

$$7 \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & \frac{7}{2} \\ \frac{7}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = A$$

Exemple. Donnons la décomposition spectrale de $A = \begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{bmatrix}$.

Nous avons calculé précédemment que les valeurs propres sont $\lambda_1 = 0$ (multiplicité 1) et $\lambda_2 = 9$ (multiplicité 2), avec les vecteurs propres unitaires :

$$\overrightarrow{u_1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{u_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{u_3} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Les matrices de projection sont :

$$\overrightarrow{u_1}\overrightarrow{u_1}^T = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{u_2}\overrightarrow{u_2}^T = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{u_3}\overrightarrow{u_3}^T = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & -4 \\ -4 & -4 & 16 \end{bmatrix}$$

La décomposition spectrale est :

$$A = 0 \cdot \overrightarrow{u_1}\overrightarrow{u_1}^T + 9 \cdot \overrightarrow{u_2}\overrightarrow{u_2}^T + 9 \cdot \overrightarrow{u_3}\overrightarrow{u_3}^T$$

Comme $\lambda_1 = 0$, le premier terme disparaît :

$$A = 9 \cdot \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 9 \cdot \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & -4 \\ -4 & -4 & 16 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{9}{2} & -\frac{9}{2} & 0 \\ -\frac{9}{2} & \frac{9}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{bmatrix} = A$$

Exemple (Calcul des puissances d'une matrice)**.** La décomposition spectrale permet de calculer facilement les puissances d'une matrice symétrique.

Soit $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$. Calculons A^{10}.

Nous avons établi la décomposition spectrale :

$$A = 7 \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = 7\overrightarrow{u_1}\overrightarrow{u_1}^T + 3\overrightarrow{u_2}\overrightarrow{u_2}^T$$

Propriété clé : Pour une matrice de projection $P_i = \overrightarrow{u_i}\overrightarrow{u_i}^T$ sur un vecteur unitaire, on a :

$$P_i^2 = \overrightarrow{u_i}\overrightarrow{u_i}^T\overrightarrow{u_i}\overrightarrow{u_i}^T = \overrightarrow{u_i}(\overrightarrow{u_i}^T\overrightarrow{u_i})\overrightarrow{u_i}^T = \overrightarrow{u_i} \cdot 1 \cdot \overrightarrow{u_i}^T = P_i$$

De plus, pour $i \neq j$:

$$P_iP_j = \overrightarrow{u_i}\overrightarrow{u_i}^T\overrightarrow{u_j}\overrightarrow{u_j}^T = \overrightarrow{u_i}(\overrightarrow{u_i} \cdot \overrightarrow{u_j})\overrightarrow{u_j}^T = \overrightarrow{u_i} \cdot 0 \cdot \overrightarrow{u_j}^T = 0$$

En développant $A^2 = (7P_1 + 3P_2)^2$:

$$A^2 = 49P_1^2 + 21P_1P_2 + 21P_2P_1 + 9P_2^2 = 49P_1 + 0 + 0 + 9P_2 = 7^2P_1 + 3^2P_2$$

Par récurrence, on obtient pour tout $n \geq 1$:

$$A^n = 7^n\overrightarrow{u_1}\overrightarrow{u_1}^T + 3^n\overrightarrow{u_2}\overrightarrow{u_2}^T$$

Donc :

$$A^{10} = 7^{10} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} + 3^{10} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{7^{10}}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{3^{10}}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 7^{10} + 3^{10} & 7^{10} - 3^{10} \\ 7^{10} - 3^{10} & 7^{10} + 3^{10} \end{bmatrix}$$

Numériquement, $7^{10} = 282475249$ et $3^{10} = 59049$, donc :

$$A^{10} = \begin{bmatrix} 141267149 & 141208100 \\ 141208100 & 141267149 \end{bmatrix}$$